

Concursul de matematică ”Ștefan Musta”

Ediția XXXI, 25 aprilie 2026#

Clasa a XI-a

Barem de corectare

Problema 1

Rezolvare: i) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = \dots = (1 + a + a^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = \dots = (a - 1)^2 (a^2 + a + 1)^2$ (2p)

A inversabilă dacă $\det A \neq 0$ adică $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (1p)

ii) Fie $a \neq 1$. Obținem: $AB = O_3 \Leftrightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}O_3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow B = O_3$ care nu convine. (3p)

Fie $a = 1$. Atunci $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și luând $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ obținem $AB = O_3$.

Cum $B \neq O_3$ rezultă că $a = 1$ este soluție a problemei. (3p)

Problema 2

Rezolvare: a) Deoarece $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{3(n+1)} < 1$ iar $a_n > 0$ rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.

Cum $0 < a_n < a_1 = \frac{1}{3}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit. (1p)

Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent. Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3(n+1)} a_n \right)$ obținem că $l = \frac{2l}{3}$ de unde $l = 0$.

Așadar limita cerută este 0. (2p)

b) Știm că $\frac{b}{x-1} - 1 < \left[\frac{b}{x-1} \right] \leq \frac{b}{x-1}$ (1), $x \neq 1$. (1p)

Dacă $x \in (-\infty, 1)$, înmulțind relația (1) cu $\frac{x-1}{a} < 0$ obținem $\frac{b}{a} \leq \frac{x-1}{a} \left[\frac{b}{x-1} \right] < \frac{b}{a} - \frac{x-1}{a}$

de unde $\lim_{x \nearrow 1} \frac{x-1}{a} \left[\frac{b}{x-1} \right] = \frac{b}{a}$ (1p)

Dacă $x \in (1, +\infty)$, înmulțind relația (1) cu $\frac{x-1}{a} > 0$ obținem $\lim_{x \searrow 1} \frac{x-1}{a} \left[\frac{b}{x-1} \right] = \frac{b}{a}$

Așadar limita cerută este $\frac{b}{a}$. (1p)

c) Din proprietatea dată rezultă că $-|x^3| \leq f(x) - x \sin x \leq |x^3|$ de unde

$$x \sin x - |x^3| \leq f(x) \leq x \sin x + |x^3| \quad (2p)$$

Împărțind ultima relație cu $x^2 > 0$ ($x \neq 0$) și ținând cont că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - |x| \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + |x| \right) = 1 \text{ obținem } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1. \quad (1p)$$

Problema 3

Rezolvare: a) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - 9x$. Funcția f este continuă pe \mathbb{R} , $f(0) = 1$, $f(1) = -6$, deci există $x_1 \in (0, 1)$ astfel încât $f(x_1) = 0$ (2p)

Cum $f(3) = 0$ există $x_2 = 3$ astfel încât $f(x_2) = 0$.

Așadar ecuația are cel puțin 2 rădăcini reale. (2p)

b) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \sin x - 3$. Deoarece funcțiile $g(x) = e^x$ și $h(x) = \sin x$ sunt funcții strict crescătoare pe intervalul $(0, 1)$ rezultă că funcția f este strict crescătoare. (2p)

Cum f este continuă pe $(0, 1)$ iar $f(0) = -2 < 0$ și $f(1) = e + \sin 1 - 3 > 0$,

$(\sin 1 > \sin \frac{\pi}{4} > 0, 7)$ rezultă că există un singur x_1 astfel încât $f(x_1) = 0$. (3p)

Notă: Pentru fiecare problemă se acordă un punct din oficiu.