Concursul de matematică ”Ștefan Musta”

Barem de corectare pentru clasa a XII-a
Ediția a XXXI - a - 25 aprilie 2026

1.

a) $(5x+6)(e+1)=0 \Rightarrow e=-1$ element neutru, (2p)

elementele simetrizabile: $x' = \frac{-6x-7}{5x+6}$ (1p)

$x' \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5x+6|6x+7 \Rightarrow 5x+6|30x+35 \Rightarrow 5x+6|1$ (2p)

$\Rightarrow 5x+6 \in \{-1,+1\} \Rightarrow 5x \in \{-7,-5\}$. Cum $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x' = -1$ (1p)

b) $x \star x' = -1$ are soluție unică $x' = -1$, în $\mathbb{Z}$ (1p)

$\Rightarrow$ pe acelaşi principiu, $\underbrace{x \star x \star x \star \cdots \star x}_{\text{2026 ori}} = -1$ are soluția unică $x = -1$.

(2p) + (1p) oficiu

2.

a) $f = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ (2p)

$\Rightarrow (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) = f(1) = 5$ (3p)

b) $f = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \Rightarrow (-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)(-1-x_4) = f(-1) = 1$ (2p)

Deci $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4) = 1$

Iar $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) = 5$ (2p) + (1p) oficiu

Atunci $g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot g(x_3) \cdot g(x_4) = 1 \cdot 5 = 5$

3.

a) Fie G o primitivă a lui f. Deci G este o derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $G'(t) = f(t), \forall\, t \in \mathbb{R}$

$F(x) = G(x) - G(1); F'(x) = f(x)$, deci F este primitiva lui f.

$F''(x) = f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow F''(x) = 0$, pentru $x = 0$.

Pentru $x \leq 0$, F este convexă, pentru $x \geq 0$, F este concavă.

Deci $x = 0$ este punct de inflexiune. (3p)

b) $\int\limits_0^1 xf(x)dx = \int\limits_0^1 xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2e}.$ (3p)

c) $\int\limits_0^1 F(x)dx = \int\limits_0^1 x'F(x)dx = x \cdot F(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x \cdot F'(x)dx = F(1) + \frac{1-e}{2e} = \frac{1-e}{2e}.$
(3p) + (1p) oficiu