Colegiul Național “Samuil Vulcan” Beiuș

Concursul de matematică “Ștefan Musta”

Ediția XXXI

25 aprilie 2026

Clasa a XI-a

Problema 1

Fie $a \in \mathbb{R}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Determină valorile lui a pentru care matricea A este inversabilă.

ii) Aflâ valorile lui a pentru care există o matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $B \neq \mathcal{O}_3$ și $A \cdot B = \mathcal{O}_3$.

Problema 2

a) Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ având termenul general $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{3^n \cdot n!}$. Arată că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent și apoi calculează $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) Calculează $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{a} \cdot \left[\frac{b}{x-1}\right]$.

c) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|f(x) - xsinx| \leq |x^3|$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Arată că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$.

Problema 3

a) Arată că ecuația $3^x = 9x$ are cel puțin două rădăcini reale.

b) Demonstrează că ecuația $e^x + sinx - 3 = 0$ are o rădăcină și numai una în intervalul $(0,1)$.

Notă: Timp de lucru: 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.